数理解析研究所講究録
174巻 1973年 186-227



# 飽和現象を記述する弱非線形拡散方程式の一例

大阪市立大 理　亀高 惟倫

## 1. 問題

次の様な弱非線形拡散方程式に対する初期値問題

$$(1,1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \dfrac{1}{4}|x|^2 u + f(u) & (x,t) \in R^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in R^n \\ 0 \le u(x,t) \le 1 & (x,t) \in R^n \times (0,\infty) \end{cases}$$

ただし　$u = u(x,t)$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$

$|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_2^2$, $\Delta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^2 + \cdots + (\frac{\partial}{\partial x_n})^2$

及び対応する定常問題

$$(1,2)\quad \begin{cases} -\Delta w + \dfrac{1}{4}|x|^2 w = f(w) & x \in R^n \\ 0 \le w(x) \le 1 & x \in R^n \end{cases}$$

を考える。非線型項 $f(u)$ は次の仮定をみたす。

仮定 1. (i) $f(u) \in C^2[0,1]$

(ii) $f(0) = f(1) = 0$

(iii) $f''(u) < 0 \qquad u \in (0,1)$

(1.1) の解 $u(x,t)$ の $t \to \infty$ とした時の漸近挙動と (1.2) の解 $w(x)$ の間の関係を調べる事が問題である。現象との関連を言えば、(1.2) の特別な場合

$$(1.3) \quad \begin{cases} -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 w + \frac{1}{4}x^2 w = f'(0)(1-w^2)w & x \in R^1 \\ 0 \le w(x) \le 1 & x \in R^1 \end{cases}$$

が第II種超伝導体中の seath (鞘, サヤ) と呼ばれる状態を記述するモデルとして提唱されている。(D. Saint-James and P. G. de Gennes [1], K. Maki and T. Tsuneto [2]) この場合 $w(x)$ は1次元的なサンプル中の表面からある距離だけ中に入った所を原点として、適当な単位ではかった座標 $x$ の所での超伝導の度合いを表わしている。$w(x)$ は Ginzburg - Landau ([3]) の order parameter と呼ばれる複素数値函数の絶対値であって、$w(x)=0$ の所は正常状態にあり $w(x)=1$ の所は完全に超伝導状態にある。あと超伝導の度合いに応じて 0 と 1 の間の値を取る。(1.3) においては $f'(0) > 0$ が十分大の時 $x=0$ で最大値

を取り $|x|$ が大きくなるにつれて急速に $0$ に近づく様な解 $w(x)$ がある事が期待されている。ここで仮定1の下で

$$
(1.4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) & (x,t) \in R^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in R^n \end{cases}
$$

の解 $u(x,t)$ は初期値 $u_0(x)$ が連続であって $0 \le u_0(x) \le 1$, $u_0(x) \not\equiv 0$ $x \in R^n$ なるば

$$
(1.5)\quad \lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1, \quad x \in R^n \text{ について compact 一様収束}
$$

が知られている。(Ikeda-Kametaka [4], Masuda [5]) (1.1) では解が大きくなるのを抑える項 $-\frac{1}{4}|x|^2 u$ が入っている、この項の影響で (1.4) に対する結論 (1.5) がどの様な変更を受けるだろうか？ というのが興味の中心である。以下に使われる論法は Fujita [6], Pazy and Rabinowitz [7] 等で使われたものと同じであって、この場合特有の工夫を少し必要とする。

## 2. 準備

(1.2) の線型化として

$$
(2.1)\quad -\Delta \varphi + \frac{1}{4}|x|^2 \varphi = \lambda \varphi \qquad x \in R^n
$$

を得る。 $n=1$ なる (2.1) は Weber の微分方程式と呼ばれ $\lambda = j+\frac{1}{2}$ ( $j=0,1,2,\cdots$ ) のとき

$$(2.2)\quad \varphi(x) = D_j(x) = H_j(x)\, e^{-\frac{1}{4}x^2} = (-1)^j e^{\frac{1}{4}x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^j e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

が解である。ただし $D_j(x)$ は $j$ 次 Weber 函数、$H_j(x)$ は $j$ 次 Hermite 多項式である。

$$(2.3)\quad \{\varphi_j(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{4}}(j!)^{-\frac{1}{2}} D_j(x)\ ;\ j=0,1,2,\cdots\}\ :\ \text{C.O.N.S. in } L^2(R^1)$$

が知られている。さて $n$ が一般の自然数である時

$N^+ = \{ j = (j_1,\cdots,j_n)\ ;\ j_i : \text{非負整数}\ i=1,\cdots,n \}$

$|j| = j_1+\cdots+j_n$ と約束すると

$$(2.4)\quad \varphi_j(x) = \varphi_{(j_1,\cdots,j_n)}(x_1,\cdots,x_n)$$
$$= (2\pi)^{-\frac{n}{4}}[j_1!\cdots j_n!]^{-\frac{1}{2}} D_{j_1}(x_1)\cdots D_{j_n}(x_n)$$

は $\lambda = |j|+\frac{n}{2}$ に対応する (2.1) の解であって

$$(2.5)\quad \{\varphi_j(x)\ ;\ j\in N^+\}\ :\ \text{C.O.N.S. in } L^2(R^n)$$

である。(2.1) の最小固有値 $\lambda=\frac{n}{2}$ に対応する固有空間は 1 次元であって

(2.6) $\qquad \psi_0(x) = e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$

を base とする。$\psi_0(x)$ は

(2.7) $\qquad -\Delta\psi_0 + \frac{1}{4}|x|^2\psi_0 = \frac{n}{2}\psi_0$

をみたし、$\max_{R^n}\psi_0(x) = 1$, $\psi_0(x) > 0 \quad x \in R^n$ である事に注意しよう。$f'(0) > \frac{n}{2}$ のとき (2.1) は supercritical という、この時

(2.8) $\qquad f(\delta_0) = \frac{n}{2}\delta_0, \qquad 0 < \delta_0 < 1$

なる $\delta_0$ が唯1つ決まる。Mehler の公式と呼ばれる

(2.9) $$\sum_{j=0}^{\infty} H_j(x)H_j(y)\frac{z^j}{j!} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\frac{z^2}{1-z^2} + xy\frac{z}{1-z^2}\right]$$

$$(x,y) \in R^2, \quad |z| < 1$$

が知られている。（Mehler [8], Hille [9] 又は 小松勇作 [10]）

3. 結論

定理．1 （subcritical case）

$0 \leq f'(0) \leq \frac{n}{2}$ の場合 (1.2) の解は $w(x) \equiv 0$ のみであっ

2、 $0 \leq u_0(x) \leq 1 \quad x \in R^n$ なる任意の $u_0(x) \in C^0(R^n)$ を初期値とする (1.1) の解 $u(x,t)$ の漸近挙動は

$$(3.1) \qquad \lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \qquad x \in R^n \text{ にかんし一様収束}$$

である。

定理. 2 ( super critical case )

$f'(0) > \frac{n}{2}$ の場合 (1.2) は自明な解 $w(x) \equiv 0$ 以外に $C^2(R^n)$ の中で唯一つの非自明解 $w(x)$ を持つ。

$$(3.2) \qquad \delta_0 e^{-\frac{1}{4}|x|^2} < w(x) < 1 \qquad x \in R^n$$

ただし $\delta_0$ は (2.8) で定義されたもの。

$$(3.3) \qquad w(x) = O(|x|^{-\gamma}) \quad \text{as } |x|\to\infty \quad \text{for } {}^\forall\gamma \geq 0$$

が成り立つ。又 $0 \leq u_0(x) \leq 1 \quad x \in R^n$

$$(3.4) \qquad \lim_{|x|\to\infty} e^{\frac{1}{4}|x|^2} u_0(x) > 0 \quad \text{or} \quad = +\infty$$

なる任意の $u_0(x) \in C^0(R^n)$ を初期値とする (1.1) の解 $u(x,t)$ の漸近挙動は

$$(3.5) \qquad \lim_{t\to\infty} u(x,t) = w(x) \qquad x \in R^n \text{ にかんし一様収束}$$

である。ただし $w(x)$ は前章で述べた (1.2) の非自明解である。

注意　定理2において (3.4) が成りたたない場合、即ち

$$(3.6)\qquad \lim_{|x|\to\infty} e^{\frac{1}{4}|x|^2}u_0(x) = 0$$

の場合には対応する (1.1) の解 $u(x,t)$ の漸近挙動にかんしては

$$(3.7)\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}}\ u(x,t) \le w(x)$$

$$(3.8)\qquad \underline{\lim_{t\to\infty}}\ u(x,t) \ge 0$$

以上の情報が得られるかどうかはわからない。

以下定理1の証明は省略、定理2のみ証明する。

4. 基本解

(1.1) の線型化に当る次の様な初期値問題を考える。

$$(4.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (\mu + \frac{1}{4}|x|^2)u + F(x,t), & (x,t)\in R^n\times(0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x\in R^n \end{cases}$$

$\mu > 0$ はパラメーターである。初期値 $u_0(x)$ 及び右辺 $F(x,t)$

は次の様な仮定をみたすものとする。

仮定 4.1 (i) $u_0(x) \in C^0(R^n)$, $0 \leq u_0(x) \leq 1$ $x \in R^n$

(ii) $F(x,t)$ : $R^n \times (0,\infty)$ で Hölder 連続, $0 \leq F(x,t) \leq \bar{F}$

$(x,t) \in R^n \times [0,\infty)$ なる $\bar{F} > 0$ がある。

以後 (4.1) の解といった場合

$$(4.2) \quad u, \ \frac{\partial u}{\partial t}, \ \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C^0(R^n \times (0,\infty))$$

$$i,j = 1, \cdots, n$$

$$(4.3) \quad 0 \leq u(x,t) \leq U(t) \quad (x,t) \in R^n \times [0,\infty) \text{ なる}$$

局所有界函数 $U(t)$ がある。

なる制限をみたす $u(x,t)$ で方程式 (4.1) をみたし初期条件を

$$(4.4) \quad \lim_{t \to 0+} u(x,t) = u_0(x) \quad x \in R^n \text{ にかんし compact 一様収束}$$

の意味でみたすものに限る事にする。

定義 4.1

$$(4.5) \quad U(x,y,t;\mu,n) = \sum_{j \in N^+} \varphi_j(x) \varphi_j(y) \, e^{-(|j| + \frac{n}{2} + \mu)t}$$

ただし (4.5) の右辺は $^\forall t_0>0$ に対し $(x,y,t)\in R^n\times R^n\times[t_0,\infty)$ で絶対一様収束する。 (4.5) より次の命題を得る。

命題 4.1

$$(4.6)\quad U(x,y,t;\mu,n) = e^{-\mu t}\prod_{k=1}^{n} U(x_k,y_k,t;0,1)$$

Mehler の公式 (2.9) より

$$(4.7)\quad U(x,y,t;0,1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sinh t}}\exp\left[-\frac{1}{4}(x^2+y^2)\coth t+\frac{1}{2}xy\,\mathrm{cosech}\,t\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\sinh t}}\exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4\sinh t}\right]\exp\left[-\frac{1}{4}(x^2+y^2)\tanh\frac{t}{2}\right]$$

が従うから (4.6) と合わせて次の命題を得る。

命題 4.2

$$(4.8)\quad U(x,y,t;\mu,n) = e^{-\mu t}\left[\frac{1}{4\pi\sinh t}\right]^{\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4\sinh t}\right]\exp\left[-\frac{1}{4}(|x|^2+|y|^2)\tanh\frac{t}{2}\right]$$

$U(x,y,t;\mu,n)$ は次の補題が成り立つという意味で (4.1) の基本解である。 以後混乱はないと思うので $n$ は省略して $U(x,y,t;\mu,n)=U(x,y,t;\mu)$ と書く。

補題 4.1

仮定 4.1 の下で初期値問題 (4.1) の解は唯一つであって、

次式で与えられる。

$$(4.9)\quad u(x,t) = \int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\, u_0(y)\, dy$$

$$+\int_0^t \int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu)\, F(y,s)\, dy\, ds$$

先ず解の一意性を証明しよう。$u_0(x) \equiv 0$, $F(x,t) \equiv 0$ の時 (4.1) の解は $u(x,t) \equiv 0$ である事をいえばよい。

$v_\varepsilon(x,t) = e^{-\varepsilon|x|^2} u(x,t)$ （$\varepsilon > 0$）は次の方程式を満す。

$$(4.10)\quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} = \Delta v_\varepsilon + 4\varepsilon \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_k} - \left[(\mu - 2n\varepsilon) + \left(\frac{1}{4} - 4\varepsilon^2\right)|x|^2\right] v_\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ を十分小さく取ると (4.10) 右辺の中の $[\quad] > 0$ である。今 $v_\varepsilon(x,t) \not\equiv 0$ とすると次の様な $(x_0, t_0) \in R^n \times (0,\infty)$ が取れると思ってよい。

$$(4.11)\quad \begin{cases} v_\varepsilon(x_0,t_0) = \max_{x \in R^n} v_\varepsilon(x,t_0) > 0 \\ v_\varepsilon(x_0,t) < v_\varepsilon(x_0,t_0) \quad (0 \le t < t_0) \end{cases}$$

したがって点 $(x_0, t_0)$ において

$$(4.12)\quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \ge 0,\quad \Delta v_\varepsilon \le 0,\quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} = 0 \text{ 等},\quad v_\varepsilon > 0$$

(4.10) と (4.12) は両立しない。したがって $v_\varepsilon(x,t) \equiv 0$ で

あり $u(x,t)\equiv 0$ である。後半の部分の (4.9) で与えられる $u(x,t)$ が (4.1) の解になる事は以下にあげる命題のうち適当なものをいくつか組み合わせるとわかる。標準的な話だから詳細は略。(4.5), (4.8) より次の命題が従う。

命題 4.3

(4.13) $$U(x,y,t;\mu)=U(y,x,t;\mu)>0,\quad (x,y,t)\in R^n\times R^n\times(0,\infty)$$

(4.14) $$\frac{\partial}{\partial t}U(x,y,t;\mu)=\Delta_x U(x,y,t;\mu)-\left(\mu+\frac{1}{4}|x|^2\right)U(x,y,t;\mu)$$
$$(x,y,t)\in R^n\times R^n\times(0,\infty)$$

(4.15) $$U(x,y,t;\mu)=\int_{R^n}U(x,z,t-s;\mu)\,U(z,y,s;\mu)\,dz$$
$$(x,y,t)\in R^n\times R^n\times(0,\infty),\qquad 0<s<t$$

命題 4.4

${}^{\forall}\theta\in R^1$, ${}^{\forall}x,z\in R^n$ 及び $1-\theta\tanh t>0$ をみたす ${}^{\forall}t>0$ に対し次式が成り立つ。

(4.16) $$\int_{R^n}U(x,y,t;\mu)\,e^{\frac{\theta}{4}|y-z|^2}\,dy$$

$$=e^{-\mu t}\left[\frac{1}{\cosh t-\theta\sinh t}\right]^{\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{4}\,\frac{|x|^2\tanh t-\theta\{|x|^2+|z|^2-2\langle x,z\rangle\operatorname{sech} t\}}{1-\theta\tanh t}\right]$$

ただし　$\langle x, z\rangle = x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n$

(4.6) に注意すると (4.16) は $n=1$, $\mu=0$ の場合に証明すればよいが、その場合

$$(4.17) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = \sqrt{\pi}$$

の計算に帰着する。以下命題 4.4 の系として次の命題が従う。まず (4.16) で $z=0$, $\theta=-1$ とおく事により

命題 4.5

$$(4.18) \qquad \int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\, e^{-\frac{1}{4}|y|^2} dy = e^{-\frac{1}{4}|x|^2 - (\frac{n}{2}+\mu)t}$$

$$(4.19) \qquad e^{-\frac{1}{4}|x|^2} = \int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\, e^{-\frac{1}{4}|y|^2} dy$$

$$+\int_0^t \int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu)\left(\frac{n}{2}+\mu\right) e^{-\frac{1}{4}|y|^2}\, dy\, ds$$

次に (4.16) で $z=0$, $\theta=0$ とおく事により

命題 4.6

$$(4.20) \qquad U_1(x,t;\mu) \equiv \int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\, dy$$

$$= e^{-\mu t}\left[\frac{1}{\cosh t}\right]^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}|x|^2 \tanh t\right]$$

$$\xrightarrow[t\to +0]{} 1 \qquad x \in R^n \text{ にかんし compact 一様収束.}$$

$$(4.21)\quad \int_t^{\infty} U_1(x,s;\mu)\,ds \le \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}+\mu}\, e^{-(\frac{n}{2}+\mu)t} \exp\left[-\frac{1}{4}|x|^2 \tanh t\right]$$

次に (4.16) で $z=0$ とおいたものを $\theta$ で微分したのち $\theta=0$ としたものに (4.20) の $\mu$ 倍を加えると

命題 4.7

$$(4.22)\quad \int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\left(\mu+\frac{1}{4}|y|^2\right)dy$$

$$= e^{-\mu t}\left[\mu+\frac{n}{2}\tanh t+\frac{1}{4}|x|^2\operatorname{sech}^2 t\right]\left[\frac{1}{\cosh t}\right]^{\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{4}|x|^2\tanh t\right]$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow}\ \mu+\frac{1}{4}|x|^2 \qquad x\in R^n \text{ にかんし compact 一様収束.}$$

命題 4.8

$$(4.23)\quad 1=\int_{R^n}U(x,y,t;\mu)\,dy+\int_0^t\int_{R^n}U(x,y,s;\mu)\left(\mu+\frac{1}{4}|y|^2\right)dy\,ds$$

上式を証明しよう。 (4.13), (4.14) 及び

$$(4.24)\quad \int_{R^n}\Delta_y U(x,y,t;\mu)\,dy = 0$$

に注意すると (4.23) の右辺の $t$ にかんする導函数は 0 したがって (4.23) の右辺は $t$ にかんし定数である。 $t\to+0$

としてみると (4.20) よりその定数は1である事がわかる。

命題 4.9

(4.25) $$\int_{R^n}\left|\frac{\partial}{\partial t}U(x,y,t;\mu)\right|dy \leq \left[n\coth t+\mu+\frac{n}{4}+\frac{3}{8}|x|^2\right]U_1(x,t;\mu)$$

(4.26) $$\int_{R^n}\left|\Delta_x U(x,y,t;\mu)\right|dy \leq \left[n\coth t+2\mu+\frac{n}{4}+\frac{5}{8}|x|^2\right]U_1(x,t;\mu)$$

(4.27) $$\int_{R^n}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}U(x,y,t;\mu)\right|dy \leq \frac{2}{\sqrt{\sinh t}}$$

(4.25) のみ証明しよう。

(4.28) $$U^{-1}(x,y,t;\mu)\frac{\partial}{\partial t}U(x,y,t;\mu)$$

$$= -\left[\mu+\frac{n}{2}\coth t-\frac{1}{4}|x-y|^2\frac{\coth t}{\sinh t}+\frac{1}{8}(|x|^2+|y|^2)\operatorname{sech}^2\frac{t}{2}\right]$$

であるから、

(4.29) $$\int_{R^n}U(x,y,t;\mu)\frac{1}{4}|y-x|^2dy$$

$$=\tanh t\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{4}|x|^2\tanh t\left(\frac{\sinh t}{\cosh t+1}\right)^2\right]U_1(x,t;\mu)$$

がいえれば (4.25) は示せた事になるが (4.29) は (4.16) で $z=x$ とおき $\theta$ で一回微分したのち $\theta=0$ とおけば得られる。 最後に (4.16) を得るのと同様の計算を行い、

$$(4.30)\qquad \max_{\xi\in R^1}\int_{|\eta-\xi|\le X} e^{-\eta^2}d\eta = \int_{|\eta|\le X} e^{-\eta^2}d\eta \qquad (X>0)$$

に注意すれば次の不等式を得る。

命題 4.10

任意の $R>0$ に対し

$$(4.31)\qquad \int_{\bigcup_{k=1}^{n}\{y;\,|y_k|>R\}} U(x,y,t;\mu)\, e^{-\frac{1}{4}|y|^2}dy$$

$$\ge \left[1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{|\eta|\le \frac{R}{2}\sqrt{1+\coth t}} e^{-\eta^2}d\eta\right]^n e^{-\frac{1}{4}|x|^2-(\frac{n}{2}+\mu)t}$$

## 5. Green 函数

(1.2) の線型化に当る次の様な問題を考えよう。

$$(5.1)\qquad -\Delta w + (\mu+\tfrac{1}{4}|x|^2)\, w = F(x) \qquad x\in R^n$$

右辺 $F(x)$ は次の仮定をみたす。

仮定 5.1　$F(x)$ : $R^n$ で Hölder 連続, $0\le F(x)\le F$ $x\in R^n$ なる $F>0$ がある。

以後 (5.1) の解といった場合 $w(x)\in C^2(R^n)$ であって (5.1) をみたし、さらに $W>0$ があって $0\le w(x)\le W$ $x\in R^n$ なるものに限る事にする。(4.8) より次式右辺の積分が $x\in R^n$ のとき意味を持つ事がわかる。

定義 5.1

$$(5.2)\qquad G(x,y;\mu) = \int_0^\infty U(x,y,t;\mu)\,dt$$

$G(x,y;\mu)$ は次の補題が成り立つという意味で (5.1) に対する Green 函数である。

補題 5.1

仮定 5.1 の下で (5.1) の解は唯一つであって次式で与えられる。

$$(5.3)\qquad v(x) = \int_{R^n} G(x,y;\mu)\,F(y)\,dy$$

解の一意性の証明は補題 4.1 の場合と同じ考えで出来る。(5.3) が (5.1) の解を与える事は前節の結果と次にかかげる命題のうちのいくつかより従う。先ず (4.13), (4.14) より次の命題が従う。

命題 5.1

$$(5.4)\qquad G(x,y;\mu) = G(y,x;\mu) > 0 \qquad (x,y)\in R^n\times R^n,\ x\neq y$$

$$(5.5)\qquad -\Delta_x G(x,y;\mu) + \left(\mu + \tfrac{1}{4}|x|^2\right) G(x,y;\mu) = 0,\quad x\in R^n-\{y\}$$

(4.18) 又は (4.19) より

命題 5.2

(5.6) $$\left(\frac{n}{2}+\mu\right)\int_{R^n} G(x,y;\mu)\, e^{-\frac{1}{4}|y|^2}\, dy = e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$$

(4.23) において $t \to \infty$ とすると

命題 5.3

(5.7) $$\int_{R^n} G(x,y;\mu)\left(\mu + \frac{1}{4}|y|^2\right) dy = 1$$

(4.31) の両辺を $t$ に関し $(0,\infty)$ で積分して

命題 5.4

$^\forall R > 0$ に対し次の様な $\delta > 0$ が取れる。

(5.8) $$\int_{\bigcup_{k=1}^{n}\{y;\, |y_k|>R\}} G(x,y;\mu)\, e^{-\frac{1}{4}|y|^2}\, dy \ge \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$$

命題 5.5

$^\forall p \in R^1$, $^\forall \mu > 0$ に対し $\mu$ と $p$ のみによる定数 $C(\mu,p)$ があって、

(5.9) $$\int_{R^n} G(x,y;\mu)\,(1+|y|^2)^p\, dy \le C(\mu,p)\,(1+|x|^2)^{p-1}$$

(5.9) を証明しよう。まず $\mu, p$ のみによる定数 $C'(\mu,p) > 0$

があって

$$\left|\Delta_y\left(\mu+\frac{1}{4}|y|^2\right)^{p-1}\right| \le \frac{1}{2}\left(\mu+\frac{1}{4}|y|^2\right)^{p} + c'(\mu,p)\, e^{-\frac{1}{4}|y|^2}$$

が成りたつ。この不等式及び (5.2), (4.14) 等を使うと

$$\int_{R^n} G(x,y;\mu)\left(\mu+\frac{1}{4}|y|^2\right)^{p} dy$$

$$= \int_0^\infty\int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\left(\mu+\frac{1}{4}|y|^2\right)^{p} dy\,dt$$

$$= \int_0^\infty\int_{R^n} \left[\Delta_y U(x,y,t;\mu) - \frac{\partial}{\partial t}U(x,y,t;\mu)\right]\left(\mu+\frac{1}{4}|y|^2\right)^{p-1} dy\,dt$$

$$= \left(\mu+\frac{1}{4}|x|^2\right)^{p-1} + \int_0^\infty\int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\,\Delta_y\left(\mu+\frac{1}{4}|y|^2\right)^{p-1} dy\,dt$$

$$\le \left(\mu+\frac{1}{4}|x|^2\right)^{p-1} + \frac{1}{2}\int_{R^n} G(x,y;\mu)\left(\mu+\frac{1}{4}|y|^2\right)^{p} dy$$

$$+\ c'(\mu,p)\int_{R^n} G(x,y;\mu)\, e^{-\frac{1}{4}|y|^2} dy$$

したがって次の不等式を得る。

(5.10) $$\frac{1}{2}\int_{R^n} G(x,y;\mu)\left(\mu+\frac{1}{4}|y|^2\right)^{p} dy$$

$$\le \left(\mu+\frac{1}{4}|x|^2\right)^{p-1} + \frac{c'(\mu,p)}{\frac{n}{2}+\mu}\, e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$$

(5.10) より (5.9) を得る。 証明終り。

定義 5.2

(5.11)
$$\begin{cases} G^{(1)}(x,y;\mu) = G(x,y;\mu) \\ G^{(j)}(x,y;\mu) = \int_{R^n} G(x,z;\mu)\, G^{(j-1)}(z,y;\mu)\, dz \\ \qquad j = 2,3,4,\cdots \end{cases}$$

(5.12)
$$G^{(j)}(x;\mu) = \int_{R^n} G^{(j)}(x,y;\mu)\, dy \qquad j = 1,2,3,\cdots$$

と定義したとき (5.9) より次の命題が従う。

命題 5.6

$\mu$ と $j$ のみによる定数 $C(\mu,j)$ があって

(5.13)
$$G^{(j)}(x;\mu) \leq C(\mu,j)\,(1+|x|^2)^{-j} \qquad j = 1,2,3,\cdots$$

## 6. 定常問題

$F(w;\mu) = f(w) + \mu w$ とするとき仮定1より $\mu \geq |f'(1)| > 0$ とすると

(6.1)
$$F'(w;\mu) > 0 \qquad w \in [0,1)$$

が成り立つ。 (1.2) は

$$(6.2)\quad \begin{cases} -\Delta w + (\mu + \frac{1}{4}|x|^2)w = F(w;\mu) & x \in R^n \\ 0 \le w(x) \le 1 & x \in R^n \end{cases}$$

と同値であり、さらに補題5.1によって

$$(6.3)\quad \begin{cases} w(x) = \int_{R^n} G(x,y;\mu) F(w(y);\mu)\,dy & x \in R^n \\ 0 \le w(x) \le 1 & x \in R^n \end{cases}$$

とも同値である。この節では定理2前半を証明する。$f'(0) > \frac{n}{2}$ (supercritical) と考えているから (2.8) をみたす $\delta_0$ が取れている。(6.3) に対する次の様な2通りの逐次近似を考えよう。

$$(6.4)\quad \begin{cases} \overline{w}_0(x;\mu) \equiv 1 \\ \overline{w}_j(x;\mu) = \int_{R^n} G(x,y;\mu) F(\overline{w}_{j-1}(y;\mu);\mu)\,dy \\ \qquad j = 1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$(6.5)\quad \begin{cases} \underline{w}_0(x;\mu,\delta) = \delta\, e^{-\frac{1}{4}|x|^2} & (0 < \delta \le \delta_0) \\ \underline{w}_j(x;\mu,\delta) = \int_{R^n} G(x,y;\mu) F(\underline{w}_{j-1}(y;\mu);\mu)\,dy \\ \qquad j = 1,2,3,\cdots \end{cases}$$

2116

先ず次の命題が成りたつ。

命題 6.1

$$(6.6)\qquad 1 \equiv \overline{w}_0(x;\mu) > \overline{w}_1(x;\mu) \geq \overline{w}_2(x;\mu) \geq \cdots$$

$$\cdots \geq \overline{w}_{j-1}(x;\mu) \geq \overline{w}_j(x;\mu) \geq \cdots \geq \overline{w}(x;\mu) \geq$$

$$\geq \underline{w}(x;\mu,\delta) \geq \cdots \geq \underline{w}_j(x;\mu,\delta) \geq \underline{w}_{j-1}(x;\mu,\delta) \geq \cdots$$

$$\cdots \geq \underline{w}_1(x;\mu,\delta) \geq \underline{w}_0(x;\mu,\delta) \equiv \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$$

ただし $\overline{w}(x;\mu) = \lim_{j\to\infty} \overline{w}_j(x;\mu)$, $\underline{w}(x;\mu,\delta) = \lim_{j\to\infty} \underline{w}_j(x;\mu,\delta)$.

命題 6.1 証明. (5.4) (5.7) 及び $F(1;\mu)=\mu$ より

$$(6.7)\qquad \overline{w}_1(x;\mu) = \int_{R^n} G(x,y;\mu)\,\mu\, dy < 1 \equiv \overline{w}_0(x;\mu)$$

を得る。したがって (5.4), (6.1) により

$$(6.8)\qquad \overline{w}_{j-1}(x;\mu) \geq \overline{w}_j(x;\mu) \qquad j=1,2,3,\cdots$$

が従う。一方 (5.4), (5.6) と

$$(6.9)\qquad F(w;\mu) \geq \left(\frac{n}{2}+\mu\right) w \qquad 0 \leq w \leq \delta_0$$

に注意すると、

$$(6.10)\qquad \underline{w}_1(x;\mu,\delta) = \int_{R^n} G(x,y;\mu)\, F(\delta e^{-\frac{1}{4}|y|^2};\mu)\, dy$$

$$\geq \int_{R^n} G(x,y;\mu)\left(\frac{n}{2}+\mu\right)\delta e^{-\frac{1}{4}|y|^2}\, dy$$

$$= \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2} = \underline{w}_0(x;\mu,\delta)$$

を得る。 したがって (6.8) を得たのと同様にして,

$$(6.11)\qquad \underline{w}_j(x;\mu,\delta) \geq \underline{w}_{j-1}(x;\mu,\delta) \qquad j=1,2,3,\cdots$$

を得る。 又同様の議論で

$$(6.12)\qquad 1 > \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2} \qquad (0<\delta\leq\delta_0)$$

より

$$(6.13)\qquad \bar{w}_j(x;\mu) \geq \underline{w}_j(x;\mu,\delta) \qquad j=0,1,2,\cdots$$

を得るから (6.6) が示された。 証明終り。

$$(6.14)\qquad F(w;\mu) \leq F'(0;\mu)\, w \qquad w\in[0,1]$$

に注意すると (6.4) (6.11) (6.12) (6.13) より次の命題を得る。

命題 6.2

$$(6.15)\qquad \bar{w}_j(x;\mu)\le (F'(0;\mu))^j G^{(j)}(x;\mu)\le C(\mu,j)(1+|x|^2)^{-j}$$

$$j=1,2,3,\cdots$$

(6.4) (6.5) において $j\to\infty$ とすると

命題 6.3

$$(6.16)\qquad \bar{w}(x;\mu)=\int_{R^n} G(x,y;\mu)F(\bar{w}(y;\mu);\mu)\,dy$$

$$(6.17)\qquad \underline{w}(x;\mu,\delta)=\int_{R^n} G(x,y;\mu)F(\underline{w}(y;\mu,\delta);\mu)\,dy$$

(6.16), (6.17) より $\bar{w}(x;\mu)$, $\underline{w}(x;\mu)$ はともに連続函数である事がわかる。又 (6.6), (6.15) より

$$(6.18)\qquad 0\le \underline{w}_j(x;\mu,\delta)\le \bar{w}_j(x;\mu)\le \bar{w}_1(x;\mu)\le C(\mu,1)(1+|x|^2)^{-1}$$

$$j=1,2,3,\cdots$$

であるから Dini の定理と合わせると次の命題が従う。

命題 6.4

$$(6.19)\qquad \lim_{j\to\infty}\bar{w}_j(x;\mu)=\bar{w}(x;\mu)$$

$j$ にかんし単調減少、$x\in R^n$ にかんし一様収束、

$$(6.20)\quad \lim_{j\to\infty} \underline{w}_j(x;\mu,\delta) = \underline{w}(x;\mu,\delta)$$

$j$ にかんし単調増加、$x\in R^n$ にかんし一様収束、

(5.4) に注意すると

$$(6.21)\quad \lim_{|x|\to\infty} e^{\frac{1}{4}|x|^2} w(x) > 0 \qquad \sigma = +\infty$$

をみたす (1.2) の解 $w(x)$ に対して次の様な $\delta$ $(0<\delta\le\delta_0)$ が取れる。

$$(6.22)\quad 1 \ge w(x) \ge \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$$

(6.6) を得たのと同様の議論で

$$(6.23)\quad \bar{w}_j(x;\mu) \ge w(x) \ge \underline{w}_j(x;\mu,\delta)$$

(6.23) において $j\to\infty$ として結局次の命題を得る。

命題 6.5

(6.21) をみたす (1.2) の解 $w(x)$ に対し $\delta$ $(0<\delta\le\delta_0)$ が取れて、

$$(6.24)\quad \bar{w}(x;\mu) \ge w(x) \ge \underline{w}(x;\mu,\delta)$$

次の命題が一番重要である。

命題 6.6

$0<\delta\leqq\delta_0$ なる任意の $\delta$ と $\mu>|f'(1)|$ なる任意の $\mu$ に対して。

(6.25) $$\bar{w}(x;\mu) \equiv \underline{w}(x;\mu,\delta)$$

命題6.6 証明、 (6.16) の両辺に $F(\underline{w}(x;\mu,\delta);\mu)$ をかけたものから (6.17) の両辺に $F(\bar{w}(x;\mu);\mu)$ をかけたものを引いて、$x$ について $R^n$ で積分すると Green 函数の対称性 (5.4) より次式を得る。

(6.26) $$\int_{R^n} \bar{w}(x;\mu)\underline{w}(x;\mu,\delta)\left[\frac{F(\underline{w}(x;\mu,\delta);\mu)}{\underline{w}(x;\mu,\delta)} - \frac{F(\bar{w}(x;\mu);\mu)}{\bar{w}(x;\mu)}\right]dx = 0.$$

(6.26) の積分が意味を持つ事は次の様にしてわかる。

$2j+1 \geqq [\frac{n}{2}]+1$ として (6.6), (6.15) 及び (5.13) より

(6.27) $$\int_{R^n}\int_{R^n} F(\underline{w}(x;\mu,\delta);\mu)\, G(x,y;\mu)\, F(\bar{w}(y;\mu);\mu)\, dy\, dx \leq$$

$$\leq \int_{R^n}\int_{R^n} F(\bar{w}_j(x;\mu);\mu)\, G(x,y;\mu)\, F(\bar{w}_j(y;\mu);\mu)\, dy\, dx \leq$$

$$\leq (F'(c;\mu))^2 \int_{R^n}\int_{R^n} \bar{w}_j(x;\mu)\, G(x,y;\mu)\, \bar{w}_j(y;\mu)\, dy\, dx \leq$$

$$\le (F'(0;\mu))^{2j+2}\int_{R^n}\int_{R^n} G^{(j)}(x;\mu)\,G(x,y;\mu)\,G^{(j)}(y;\mu)\,dy\,dx \le$$

$$\le (F'(0;\mu))^{2j+2}\int_{R^n} G^{(2j+1)}(x;\mu)\,dx \quad < \infty .$$

さて (6,26) の被積分函数は (6,6) と仮定 1 より非負である、したがって

$$(6,28) \qquad \frac{F(\underline{w}(x;\mu,\delta);\mu)}{\underline{w}(x;\mu,\delta)} - \frac{F(\bar{w}(x;\mu);\mu)}{\bar{w}(x;\mu)} \equiv 0$$

を得るから、再び仮定 1 より (6,25) を得る。　証明終り。

(6,24), (6,25) より (6,25) の両辺は $\delta$, $\mu$ に無関係である事がわかる。

$$(6,29) \qquad \bar{w}(x;\mu) \equiv \underline{w}(x;\mu,\delta) = w(x)$$

と書く事にすると (6,16) より $w(x)$ は積分方程式 (6,3) の解であり、従って求める問題 (1,2) の非自明解である。

次に (1,2) の解で非自明なもの $\tilde{w}(x)$ はすべて $w(x)$ に一致する事を示そう。$\tilde{w}(x)$ も積分方程式 (6,3) をみたすから $\tilde{w}(x) \not\equiv 0$ より実は $\tilde{w}(x) > 0$　$x \in R^n$ である。
(6,24) を得たのと同様にして、

$$(6.30) \qquad w(x) \geq \tilde{w}(x) > 0 \qquad x \in R^n$$

を得る。したがって (6.25) を得たのと同じ論法で

$$(6.31) \qquad w(x) \equiv \tilde{w}(x) \qquad x \in R^n$$

を得る。(1.2) の非自明解の一意性が示された。定理2の (3.2) は (6.6) より、(3.3) は (6.6), (6.15) より従う。以上で定理2の前半の証明を終る。

## 7. 非定常問題

$\mu$, $F(u;\mu)$ は前節と同じとし、引続き $f'(0) > \frac{n}{2}$ (supercritical) の場合を考える事にする。問題 (1.1) は

$$(7.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (\mu + \frac{1}{4}|x|^2) u + F(u;\mu) & (x,t) \in R^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in R^n \\ 0 \leq u(x,t) \leq 1 & (x,t) \in R^n \times (0,\infty) \end{cases}$$

と同値であり、さらに補題 4.1 より

$$(7.2) \qquad \begin{cases} u(x,t) = \int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\, u_0(y)\, dy \\ \qquad + \int_0^t \int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu)\, F(u(y,s);\mu)\, dy\, ds \end{cases}$$

$$\left\{ \quad 0 \le u(x,t) \le 1 \qquad (x,t) \in R^n \times (0,\infty) \right.$$

とも同値である。この節では定理の後半を証明する。次の様な逐次近似を考える。

(7.3)
$$\begin{cases} u_j(x,t;\mu) = \int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\, u_0(y)\, dy \\ \qquad + \int_0^t \int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu) F(u_{j-1}(y,s;\mu);\mu)\, dy\, ds \\ \qquad\qquad j = 1,2,3,\cdots \\ u_0(x,t;\mu) \equiv u_0(x) \end{cases}$$

(7.4)
$$\begin{cases} \bar{u}_j(x,t;\mu) = \int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\, dy \\ \qquad + \int_0^t \int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu) F(\bar{u}_j(y,s;\mu);\mu)\, dy\, ds \\ \qquad\qquad j = 1,2,3,\cdots \\ \bar{u}_0(x,t;\mu) \equiv 1 \end{cases}$$

(7.5)
$$\begin{cases} \underline{u}_j(x,t;\mu\delta) = \int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\, \delta e^{-\frac{1}{2}|y|^2}\, dy \\ \qquad + \int_0^t \int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu) F(\underline{u}_{j-1}(y,s;\mu,\delta);\mu)\, dy\, ds \\ \qquad\qquad j = 1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{u}_0(x,t;\mu,\delta) \equiv \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2} & (0<\delta\le\delta_0) \end{cases}$$

命題 7.1

$$(7.6)\quad 1 \equiv \bar{u}_0(x,t;\mu) > \bar{u}_1(x,t;\mu) \geq \cdots$$

$$\cdots \geq \bar{u}_{j-1}(x,t;\mu) \geq \bar{u}_j(x,t;\mu) \geq \cdots$$

$$\cdots \geq \bar{u}(x,t;\mu) \geq w(x) \geq \underline{u}(x,t;\mu,\delta) \geq \cdots$$

$$\cdots \geq \underline{u}_j(x,t;\mu,\delta) \geq \underline{u}_{j-1}(x,t;\mu,\delta) \geq \cdots$$

$$\cdots \geq \underline{u}_1(x,t;\mu,\delta) \geq \underline{u}_0(x,t;\mu,\delta) \equiv \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$$

ただし $\bar{u}(x,t;\mu) = \lim_{j\to\infty} \bar{u}_j(x,t;\mu)$, $\underline{u}(x,t;\mu,\delta) = \lim_{j\to\infty} \underline{u}_j(x,t;\mu,\delta)$
$w(x)$ は前節で存在を保証した (1.2) の唯一つの非自明解。

命題 7.1 証明、 $u(x,t) \equiv w(x)$ は (1.1) の解とみなせるから補題 4.1 により

$$(7.7)\quad w(x) = \int_{R^n} U(x,y,t;\mu)\,w(y)\,dy$$

$$+\int_0^t \int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu)\,F(w(y);\mu)\,dy\,ds$$

を得る。 又 (7.4) で $j=1$ とすると

$$(7.8)\qquad \bar{u}_1(x,t;\mu)=\int_{R^n}U(x,y,t;\mu)dy+\int_0^t\int_{R^n}U(x,y,t-s;\mu)F(1;\mu)\,dyds$$

を得るが、　$w(x)<1$　に注意して (7.7) と (7.8) の右辺を比較すると、

$$(7.9)\qquad \bar{u}_1(x,t;\mu)\geq w(x)$$

を得る。　又　$F(1;\mu)=\mu$　であるから (4.23) より

$$(7.10)\qquad \bar{u}_1(x,t;\mu)\leq 1\equiv \bar{u}_0(x,t;\mu)$$

(7.9), (7.10) を出発点として、$j$ にかんする帰納法により

$$(7.11)\qquad \bar{u}_{j+1}(x,t;\mu)\geq \bar{u}_j(x,t;\mu)\geq w(x)\qquad j=1,2,3,\cdots$$

を得る。　一方 (7.5) で $j=1$ とすると

$$(7.12)\qquad \underline{u}_1(x,t;\mu,\delta)=\int_{R^n}U(x,y,t;\mu)\,\delta e^{-\frac{1}{4}|y|^2}dy$$

$$+\int_0^t\int_{R^n}U(x,y,t-s;\mu)F(\delta e^{-\frac{1}{4}|y|^2};\mu)\,dyds$$

を得るが、　$w(x)\geq\delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$　に注意して (7.7) と (7.12) の右辺を比較して

$$(7.13)\qquad w(x)\geq \underline{u}_1(x,t;\mu,\delta)$$

を得る。 又 (6.9), (4.19) より

(7.14) $\quad \underline{u}_1(x,t;\mu,\delta) \geq \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2} = \underline{u}_0(x,t;\mu,\delta)$

を得る。 (7.13), (7.14) を出発点として, $j$ にかんする帰納法により

(7.15) $\quad w(x) \geq \underline{u}_j(x,t;\mu,\delta) \geq \underline{u}_{j-1}(x,t;\mu,\delta), \quad j=1,2,3,\cdots$

を得る。 証明終り。

命題 7.2

(7.16) $$\overline{u}_j(x,t;\mu) \leq \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{k!}(F'(0;\mu))^k t^k U_1(x,t;\mu)$$

$$+ (F'(0;\mu))^j G^{(j)}(x;\mu) \qquad j=1,2,3,\cdots$$

特に $^\forall t_0>0$ に対し $\mu$, $j$, $t_0$ のみによる定数 $C(\mu,j,t_0)$ があって $(x,t) \in R^n \times [t_0,\infty)$ とするとき

(7.17) $\quad \overline{u}_j(x,t;\mu) \leq C(\mu,j,t_0)(1+|x|^2)^{\nu}, \quad j=1,2,3,\cdots$

命題 7.2 証明、 $j$ にかんする帰納法で (7.16) を証明しよう。 $F(1;\mu) < F'(0,\mu)$ に注意すると (7.8) より

$$(7.18)\qquad \bar{u}_1(x,t;\mu) \leq U_1(x,t;\mu) + F'(0;\mu)\, G^{(1)}(x;\mu)$$

を得る。これは (7.16) が $j=1$ の場合正しい事を示している。帰納法の仮定としてある自然数 $j$ に対して (7.16) が成り立つとする。先ず (4.15) より

$$(7.19)\qquad \int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu)\, U_1(y,s;\mu)\,dy = U_1(x,t;\mu)$$

が成り立つ事を注意しておく。(7.4) より (6.14) に注意して上の仮定と (7.19) を使うと

$$(7.20)\qquad \bar{u}_{j+1}(x,t;\mu) = U_1(x,t;\mu)$$

$$+ \int_0^t \int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu)\, F(\bar{u}_j(y,s;\mu);\mu)\,dy\,ds$$

$$\leq U_1(x,t;\mu) + F'(0;\mu) \int_0^t \int_{R^n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{k!} (F'(0;\mu))^k s^k\, U(x,y,t-s;\mu)\, U_1(y,s;\mu)\,dy\,ds$$

$$+ F'(0;\mu) \int_0^t \int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu)\, (F'(0;\mu))^j\, G^{(j)}(y;\mu)\,dy\,ds$$

$$\leq U_1(x,t;\mu) + \sum_{k=0}^{j-1} (F'(0;\mu))^{k+1}\, U_1(x,t;\mu) \int_0^t \frac{1}{k!} s^k\,ds$$

$$+ (F'(0;\mu))^{j+1} \int_{R^n} G(x,y;\mu)\, G^{(j)}(y;\mu)\,dy.$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} (F(0;\mu))^k t^k U_1(x,t;\mu) + (F(0;\mu))^{j+1} G^{(j+1)}(x;\mu) .$$

(7.20) は (7.16) が $j$ を $j+1$ でおきかえても成り立つ事を示している。したがって (7.16) が全ての自然数 $j$ に対して正しい事が示された。(7.17) は (7.16) より従う。証明終り。

命題 7.3

$$(7.21) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_j(x,t;\mu) \le 0 \qquad j=0,1,2,3,\cdots$$

$$(7.22) \qquad \frac{\partial}{\partial t} u_j(x,t;\mu,\xi) \ge 0 \qquad j=0,1,2,3,\cdots$$

$j$ にかんする帰納法で $^\forall h>0$ に対し

$$(7.23) \qquad \bar{u}_j(x,t;\mu) - \bar{u}_j(x,t+h;\mu) \ge 0$$

を示すことが出来るから (7.21) を得る。(7.22) の証明も同様。

命題 7.4

$$(7.24) \qquad \lim_{t\to\infty} \bar{u}_j(x,t;\mu) = \bar{u}_j(x;\mu) \qquad j=0,1,2,\cdots$$

$t$ にかんし単調減少、$x \in R^2$ にかんし一様収束、

(7.25) $\quad \lim_{t\to\infty} u_j(x,t;\mu,\xi) = w_j(x;\mu,\xi) \qquad j=0,1,2,\cdots$

$t$ にかんし単調増加、$x\in R^n$ にかんし一様収束、ただし $\bar{w}_j(x;\mu)$, $w_j(x;\mu,\xi)$ は前節 (6.4), (6.5) で定義されたもの。

命題 7.4 証明、(7.24) のみ証明する。(7.25) の証明も同様である。(7.21), (7.6) より $\lim_{t\to\infty} \bar{u}_j(x,t;\mu)$ が存在する事は明らかである。$j=0$ の場合は自明。$j=1$ のとき (7.24) が正しい事をいおう。(6.4), (7.4) より

(7.26) $\quad \bar{u}_1(x,t;\mu) - \bar{w}_1(x;\mu)$

$$= U_1(x,t;\mu) + \int_0^t\int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu)\,F(1;\mu)\,dy\,ds$$

$$- \int_0^\infty\int_{R^n} U(x,y,s;\mu)\,F(1;\mu)\,dy\,ds$$

$$= U_1(x,t;\mu) - F(1;\mu)\int_t^\infty U_1(x,s;\mu)\,ds$$

(4.20), (4.21) より

(7.27) $\quad \lim_{t\to\infty}\{\bar{u}_1(x,t;\mu) - \bar{w}_1(x;\mu)\} = 0$, $x\in R^n$ で一様収束、

次にある自然数 $j$ に対し (7.24) が正しいと仮定して $j+1$ に対しても (7.24) が正しい事をいえばよい。(6.4)(7.4)より

$$(7.28)\qquad \bar{u}_{j+1}(x,t;\mu) - \bar{w}_{j+1}(x;\mu) =$$

$$= U_1(x,t;\mu) - \int_t^\infty \int_{R^n} U(x,y,s;\mu)\, F(\bar{w}_j(y;\mu);\mu)\, dy\, ds$$

$$+ \int_0^t \int_{R^n} U(x,y,s;\mu) \left[ F(\bar{u}_j(y,t-s;\mu);\mu) - F(\bar{w}_j(y;\mu);\mu) \right] dy\, ds$$

であるが、(4.20), (4.21) より (7.28) 右辺第1項, 第2項は $t \to \infty$ とするとき一様に0に収束する。したがって第3項が $t \to \infty$ とするとき 0 に一様収束する事を示せばよい。帰納法の仮定を使うと $^\forall \varepsilon > 0$ に対し $T > 0$ があって

$$(7.29)\qquad t-s > T,\ y \in R^n \text{ に対して}$$

$$\left| F(\bar{u}_j(y,t-s;\mu);\mu) - F(\bar{w}_j(y;\mu);\mu) \right| < \varepsilon$$

とできる。

$$(7.30)\qquad \int_0^t \int_{R^n} U(x,y,s;\mu) \left[ F(\bar{u}_j(y,t-s;\mu);\mu) - F(\bar{w}_j(y;\mu);\mu) \right] dy\, ds$$

$$\le \varepsilon \int_0^{t-T} \int_{R^n} U(x,y,s;\mu)\, dy\, ds + F(1;\mu) \int_{t-T}^t \int_{R^n} U(x,y,s;\mu)\, dy\, ds$$

$$\leq \varepsilon G^{(1)}(x;\mu) + F(1;\mu)\int_{t-T}^{\infty} U_1(x,s;\mu)\,ds$$

であるから $t\to\infty$ とすると (4.21) より (7.30) の最後の項は 0 に一様収束する。したがって (5.17) より従う $G^{(1)}(x;\mu) < \frac{1}{\mu}$ 又は (5.13) に注意すると

(7.31) $\lim_{t\to\infty} \{\bar{u}_{j+1}(x,t;\mu) - \bar{v}_{j+1}(x;\mu)\} = 0$, $x\in R^n$ で一様収束

が示せた事になり、(7.24) が全ての自然数 $j$ に対して成り立つ事がわかった。証明終り。

命題 7.5

$\lim_{j\to\infty} \bar{u}_j(x,t;\mu) = \bar{u}(x,t)$ は $\mu$ に無関係であって (1.1) の $u_0(x)\equiv 1$ に対応する解である。さらに

(7.32) $\lim_{j\to\infty} \bar{u}_j(x,t;\mu) = \bar{u}(x,t)$

$j$ にかんし単調減少、$(x,t)\in R^n\times[0,\infty)$ で一様収束。

(7.33) $\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}(x,t) \leq 0$

(7.34) $\lim_{t\to\infty} \bar{u}(x,t) = v(x)$, $x\in R^n$ で一様収束。

命題 7.6

$\lim_{j\to\infty} \underline{u}_j(x,t;\mu,\delta) = \underline{u}(x,t;\delta)$ は $\mu$ に無関係であって、

ここ!

(1.1) の $u_0(x) = \delta e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ に対応する解である。さらに

$$(7.35) \qquad \lim_{j\to\infty} \underline{u}_j(x,t;\mu,\delta) = \underline{u}(x,t;\delta)$$

$j$ にかんし単調増加，$(x,t)\in R^n\times[0,\infty)$ で一様収束．

$$(7.36) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\underline{u}(x,t;\delta) \geq 0$$

$$(7.37) \qquad \lim_{t\to\infty} \underline{u}(x,t;\delta) = w(x), \qquad x\in R^n \text{ で一様収束．}$$

命題 7.5 のみ証明しよう。命題 7.6 の証明は同様に出来る。$\lim_{j\to\infty} \bar{u}_j(x,t;\mu) = \bar{u}(x,t;\mu)$ が存在する事は (7.6) より明らか。(7.4) において $j\to\infty$ とすると $\bar{u}(x,t;\mu)$ は積分方程式 (7.2) をみたす事がわかる。したがって (1.1) の $u_0(x)\equiv 1$ に対応する解である。(1.1) の解の一意性より $\bar{u}(x,t;\mu) = \bar{u}(x,t)$ は $\mu$ に無関係である事がわかる。$\bar{u}(x,t)$ は連続である事がわかったから (7.6) (7.17) と Dini の定理により $0 < {}^{\forall}t_0 < {}^{\forall}t_1$ に対し

$$(7.38) \qquad \lim_{j\to\infty} \bar{u}_j(x,t;\mu) = \bar{u}(x,t), \quad (x,t)\in R^n\times[t_0,t_1] \text{ で一様収束}$$

次に $\bar{u}(x,t)$ がみたす (7.2) で $u_0(x)\equiv 1$ としたものと (7.4) より

$$(7.39) \qquad \bar{u}_j(x,t;\mu) - \bar{u}(x,t) = \int_0^t\!\!\int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu)\left[\bar{F}(\bar{u}_{j-1}(y,s;\mu),\mu) - \bar{F}(\bar{u}(y,s);\mu)\right]dy\,ds$$

$$\leq F(1;\mu)\int_0^t\int_{R^n} U(x,y,t-s;\mu)\,dy\,ds$$

$$\leq F(1;\mu)\int_0^t U_1(x,s;\mu)\,ds$$

したがって (4.20) より

(7.40) $$\lim_{t\to 0}\{\bar{u}_j(x,t;\mu)-\bar{u}(x,t)\}=0$$

$j$ 及び $x\in R^n$ にかんし一様収束。

又 (7.6), (7.21), (7.24) 及び (6.19) より

(7.41) $$\lim_{\substack{j\to\infty\\ t\to\infty}}\{\bar{u}_j(x,t;\mu)-w(x)\}=0,\quad x\in R^n \text{ で一様収束。}$$

(7.38), (7.40) 及び (7.41) より (7.32), (7.34) を得る。

(7.33) は (7.32), (7.21) より従う。証明終り。

(7.6) を得たのと同様にして次の命題を得る。

命題 7.7

(7.42) $$\delta e^{-\frac{a}{4}|x|^2}\leq u_0(x)\leq 1\qquad x\in R^n$$

なる任意の連続函数 $u_0(x)$ に対応する (7.3) の解は

(7.43) $$\underline{u}_j(x,t;\mu,\delta)\leq u_j(x,t;\mu)\leq \bar{u}_j(x,t;\mu),\quad j=0,1,2,\cdots$$

をみたす。

命題 7.8

(7.42) を仮定するとき $\lim_{j\to\infty} u_j(x,t;\mu) = u(x,t)$ が存在して $\mu$ に無関係である。さらに $u(x,t)$ は (1.1) の解であって、次の事が成り立つ。

(7.44) $$\lim_{j\to\infty} u_j(x,t;\mu) = u(x,t), \quad (x,t)\in R^n\times[0,\infty) \text{ で一様収束.}$$

(7.45) $$\underline{u}(x,t;\delta) \le u(x,t) \le \bar{u}(x,t)$$

(7.46) $$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = w(x), \quad x\in R^n \text{ で一様収束.}$$

命題 7.8 証明.

(7.47) $$m_j(t;\mu) = \sup_{x\in R^n} \left| u_{j+1}(x,t;\mu) - u_j(x,t;\mu) \right|$$
$$j=0,1,2,\cdots$$

とおくと (7.3), (4.20) より次の評価を得る。

(7.48) $$\begin{cases} m_j(t;\mu) \le F'(0;\mu)\int_0^t m_{j-1}(s;\mu)\,ds, & j=1,2,3,\cdots \\ m_0(t;\mu) \le 1 \end{cases}$$

したがって

(7.49) $$M_k(t;\mu) = \sum_{j=0}^{k} m_j(t;\mu)$$

とおけば (7.48) より

$$(7.50)\qquad M_k(t;\mu) \leq 1 + F'(0;\mu)\int_0^t M_{k-1}(s;\mu)\,ds, \quad k=1,2,3,\cdots$$

そして

$$(7.51)\qquad M(t;\mu) = 1 + F'(0;\mu)\int_0^t M(s;\mu)\,ds$$

のなめらかな解は唯一つであって

$$(7.52)\qquad M(t;\mu) = \exp\left[F'(0;\mu)\,t\right]$$

である。 (7.50), (7.51) を比較すると

$$(7.53)\qquad M_k(t;\mu) \leq M(t;\mu)$$

を得る。 したがって $\lim_{j\to\infty} u_j(x,t;\mu) = u(x,t;\mu)$ が存在して、 ${}^{\forall}t_1 > 0$ に対して

$$(7.54)\qquad \lim_{j\to\infty} u_j(x,t;\mu) = u(x,t;\mu)$$

$(x,t) \in R^3 \times [0, t_1]$ で一様収束。

(7.54) より (7.3) において $j\to\infty$ とすると $u(x,t;\mu)$ は積分方程式 (7.2) をみたす事がわかる。 したがって (1.1) の解である。 (1.1) の解の一意性より $u(x,t;\mu) = u(x,t)$ は $\mu$ に無関係である事がわかる。 (7.43), (7.32), (7.34),

(7.35) 及び (7.37) より (7.44) を得る。又 (7.44), (7.43), (7.32) 及び (7.35) より (7.45) が従う。(7.45) (7.34) 及び (7.37) より (7.46) が従う。証明終り。

最後に (7.42) の制限を定理2の仮定 (3.4) の如くゆるめる事が出来るという事は (4.31) に注意すればよい。以上で定理2の証明を完了する。

## 参考文献

[1] D. Saint-James and P. G. de Gennes : Onset of superconductivity in decreasing fields, Phys. Letters 7 ('63) 306-308.

[2] K. Maki and T. Tsuneto : Pauli paramagnetism and superconducting state, Prog. Theor. Phys. 31 ('64) 945-956.

[3] V. L. Ginzburg and L. D. Landau : On the theory of superconductivity (in Russian), Zh. exsper. teor. Fiz. 20 ('50) 1064-1082.

[4] N. Ikeda and Y. Kametaka : (to appear).

[5] K. Masuda : On the growth of solutions of nonlinear diffusion equation $u_t = \Delta u + F(u)$, (to appear).

[6] H. Fujita : On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $v_t = \Delta v + e^v$, Bull. A. M. S. 75 ('69) 132-135.

[7] A. Pazy and P. H. Rabinowitz : A nonlinear integral equation with applications to neutron transport theory, Arch. Rat. Mech. Anal. 32 ('69) 226-246. ibd. 35 ('69) 409-410.

[8] F. G. Mehler : Reihenentwicklungen nach Laplaceschen Funktionen höherer Ordnung, Joul. f. Math. 66 (1866) 161-176.

[9] E. Hille : A class of reciprocal functions, Annals of Math. 27 ('26) 427-464.

[10] 小松勇作 ; 特殊函数演習, 朝倉書店.

なお [1], [2], [3] は 日本物理学会発行 物理学論文選集 153 超伝導 にもある。特に [3] の日本語訳もある。